

SUSTAV LINEARNIH JEDNADŽBI

– usustavljivanje gradiva –

1) Metodom **supstitucije** riješi sustav: $5x - 2y + 13 = 0$
 $\underline{x - 2y + 9 = 0}$

2) Metodom **suprotnih koeficijenata** riješi sustav: $7x + 4y - 31 = 0$
 $\underline{-2x + 5y = -15}$

3) Riješi sustav: $3(x - 2) - 2(2x + y - 3) = -9$
 $\underline{5x + 2 = 3 - 4(3x - y)}$

4) Riješi sustav: $\frac{3a + 3b + 1}{7} + \frac{2a - b + 1}{4} = -1$
 $\underline{\frac{a - 3b + 1}{3} - \frac{a - 2b - 2}{2} = 2}$

5) Provjeri je li uređeni par **(2, -1)** rješenje sustava: $5x - 2y - 12 = 0$
 $\underline{3x + y = 5}$

6) Veličina kuta uz osnovicu jednakokračnog trokuta za 30° je manja od veličine kuta nasuprot osnovice. Kolike su veličine kutova tog trokuta? (**napravi skicu**)

7) Opseg jednakokračnog trokuta je 16 cm , a osnovica se prema kraku odnosi kao $2 : 3$. Kolike su duljine stranica tog trokuta?

8) 5 kg jabuka i 3 kg marelica treba platiti 19.5 € , a 8 kg jabuka i 7 kg marelica treba platiti 40 € . Kolika je cijena jabuka i marelica po kilogramu? Koliko treba platiti 2 kg jabuka i 6 kg marelica?

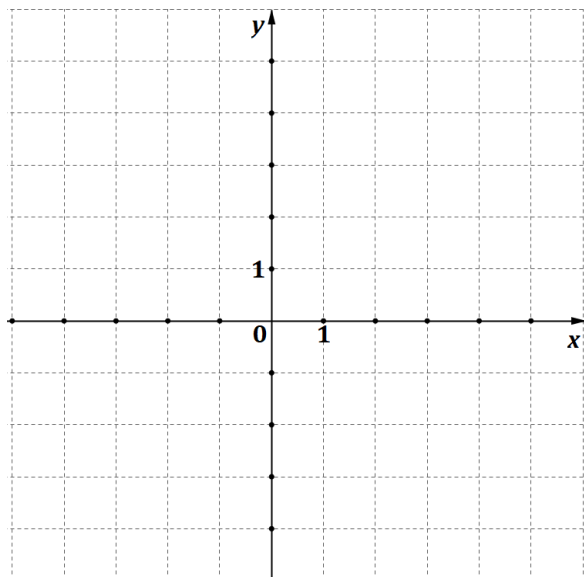
9) Na kvizu je postavljeno 50 pitanja svakoj ekipi. Za svaki se ispravan odgovor priznaje 5 boda, a za netočan se odgovor oduzimaju 2 boda. Koliko je pitanja točno, a koliko netočno odgovoreno ako je ekipa „Malci“ odgovorila na sva pitanja i time ostvarila 194 boda?

10) Odredi koordinate točaka u kojima pravac $y = -\frac{4}{3}x + 2$ siječe koordinatne osi.

11) Odredi eksplicitnu jednadžbu pravca koji ima nagib -4 i prolazi točkom $A(-2, 3)$.

12) Točka $M(-1, -6)$ pripada pravcu $y = ax - 8$. Odredi jednadžbu pravca. Je li linearna ovisnost rastuća ili padajuća?

13) Zadana je linearna ovisnost $y = \frac{-3}{5}x + 2$.



a) Nacrtaj njezin graf.

b) Odredi:

► nagib _____ ► odsječak na y - osi _____

c) Pada li ili raste pravac? _____

d) Na grafu očitaj točku kojoj je **apscisa 5**. _____

e) Kakav kut zatvara pravac s pozitivnim dijelom x - osi? _____

f) Izračunaj nultočku T i naznači je na grafu linearne ovisnosti.

14) Odredi eksplicitnu jednadžbu pravca koji prolazi točkama $A(-1, -5)$ i $B(-2, 6)$.

15) Koliki je koeficijent smjera pravca **usporednog** s pravcem $3x - 2y + 5 = 0$.

16) Odredi racionalni broj m za koji su pravci $y = (3m + 1)x - 2$ i $y = \left(\frac{m}{2} + 6\right)x + 6$ usporedni.

17) Grafički i računski riješi sustav. U kakvom su odnosu pravci i rješenje sustava jednadžbi?

a) $x + 2y = 8$

b) $y = 2x + 1$

c) $3y = -2x - 3$

$y = -5x - 5$

$-6x + 3y - 3 = 0$

$y = -\frac{2}{3}x + 5$

18) Zaokruži pravac koji **najbrže raste**:

a) $y = -\frac{1}{6}x + 6$

b) $y = -6x + 3$

c) $y = \frac{1}{6}x + 6$

d) $y = 6x + 3$

19) Zaokruži pravac koji **najbrže pada**:

a) $y = -\frac{1}{6}x + 6$

b) $y = -6x + 3$

c) $y = \frac{1}{6}x + 6$

d) $y = 6x + 3$

SUSTAV LINEARNIH JEDNADŽBI

– rješenja –

1) Metodom **supstitucije** riješi sustav:

$$\begin{array}{r} 5x - 2y + 13 = 0 \\ x - 2y + 9 = 0 \end{array} \Rightarrow \boxed{x = 2y - 9}$$

$$\begin{array}{r} 5(2y - 9) - 2y + 13 = 0 \\ 10y - 45 - 2y + 13 = 0 \\ 8y = 32 \quad / : 8 \\ \boxed{y = 4} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x = 2y - 9 \\ x = 2 \cdot 4 - 9 \\ x = 8 - 9 \\ \boxed{x = -1} \end{array}$$

Rješenje: $(-1, 4)$

2) Metodom **suprotnih koeficijenata** riješi sustav:

$$\begin{array}{r} 7x + 4y - 31 = 0 \\ -2x + 5y = -15 \\ \hline 7x + 4y = 31 \quad / \cdot 2 \\ -2x + 5y = -15 \quad / \cdot 7 \\ \hline 14x + 8y = 62 \\ -14x + 35y = -105 \\ \hline 43y = -43 \quad / : 43 \\ \boxed{y = -1} \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} -2x + 5y = -15 \\ -2x + 5 \cdot (-1) = -15 \\ -2x - 5 = -15 \\ -2x = -10 \quad / : (-2) \\ \boxed{x = 5} \end{array}$$

Rješenje: $(5, -1)$

3) Riješi sustav: $\begin{array}{r} 3(x - 2) - 2(2x + y - 3) = -9 \\ 5x + 2 = 3 - 4(3x - y) \end{array}$

$$\begin{array}{r} 3(x - 2) - 2(2x + y - 3) = -9 \\ 5x + 2 = 3 - 4(3x - y) \\ \hline 3x - 6 - 4x - 2y + 6 = -9 \\ 5x + 2 = 3 - 12x + 4y \\ \hline -x - 2y = -9 \quad / \cdot (-2) \\ 17x - 4y = 1 \\ 2x + 4y = 18 \\ 17x - 4y = 1 \quad \left. \begin{array}{c} \\ \end{array} \right\} + \\ \hline 19x = 19 \quad / : 19 \\ \boxed{x = 1} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -x - 2y = -9 \\ -1 - 2y = -9 \\ -2y = -8 \quad / : (-2) \\ \boxed{y = 4} \end{array}$$

Rješenje: $(1, 4)$

4) Riješi sustav:

$$\begin{array}{r} \frac{3a + 3b + 1}{7} + \frac{2a - b + 1}{4} = -1 \quad / \cdot 28 \\ \frac{a - 3b + 1}{3} - \frac{a - 2b - 2}{2} = 2 \quad / \cdot 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4(3a + 3b + 1) + 7(2a - b + 1) = -28 \\ 2(a - 3b + 1) - 3(a - 2b - 2) = 12 \\ \hline 12a + 12b + 4 + 14a - 7b + 7 = -28 \\ 2a - 6b + 2 - 3a + 6b + 6 = 12 \\ \hline 26a + 5b = -39 \\ -a = 4 \\ \hline \Rightarrow \boxed{a = -4} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26a + 5b = -39 \\ 26 \cdot (-4) + 5b = -39 \\ -104 + 5b = -39 \\ 5b = 65 \quad / : 5 \\ \boxed{b = 13} \end{array}$$

Rješenje: $(-4, 13)$

5) Provjeri je li uređeni par $(2, -1)$ rješenje sustava:

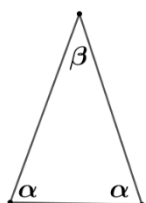
$$\begin{aligned} 5x - 2y - 12 &= 0 \\ 3x + y &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2, -1) &\Rightarrow 5x - 2y - 12 = 0 \\ &10 + 2 - 12 = 0 \\ &\boxed{0 = 0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2, -1) &\Rightarrow 3x + y = 5 \\ &6 - 1 = 5 \\ &\boxed{5 = 5} \end{aligned}$$

$(2, -1)$ JE RJEŠENJE sustava.

6) Veličina kuta uz osnovicu jednakokravnog trokuta za 30° je manja od veličine kuta nasuprot osnovice. Kolike su veličine kutova tog trokuta? (napravi skicu)



Kut uz osnovicu za 30° je manji od kuta nasuprot osnovice:
Zbroj veličina unutarnjih kutova u trokutu je 180° :

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta - 30^\circ \\ 2\alpha + \beta &= 180^\circ \end{aligned}$$

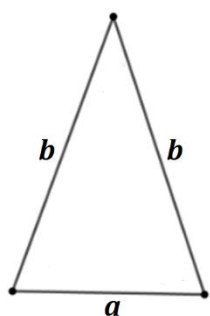
$$\begin{aligned} \alpha &= \beta - 30^\circ \\ 2\alpha + \beta &= 180^\circ \\ 2(\beta - 30^\circ) + \beta &= 180^\circ \\ 2\beta - 60^\circ + \beta &= 180^\circ \\ 3\beta &= 240^\circ \quad / : 3 \\ \beta &= 80^\circ \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \alpha &= \beta - 30^\circ \\ \alpha &= 80^\circ - 30^\circ \\ \alpha &= 50^\circ \end{aligned}$$

Veličina kuta uz osnovicu je 50° , a nasuprot osnovice je 80° .

7) Opseg jednakokravnog trokuta je 16 cm , a osnovica se prema kraku odnosi kao $2 : 3$. Kolike su duljine stranica tog trokuta?



a = duljina osnovice
 b = duljina kraka

Opseg je 16 cm :
osnovica : krak = $2 : 3$

$$\begin{aligned} a + 2b &= 16 \\ a : b &= 2 : 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a + 2b &= 16 \\ 3a &= 2b \\ a + 2b &= 16 \\ 3a - 2b &= 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} +$$

$$\begin{aligned} 4a &= 16 \quad / : 4 \\ a &= 4 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a + 2b &= 16 \\ 4 + 2b &= 16 \\ 2b &= 12 \quad / : 2 \\ b &= 6 \text{ cm} \end{aligned}$$

Duljina osnovice je 4 cm , a duljina kraka 6 cm .

8) 5 kg jabuka i 3 kg marelica treba platiti 19.5 € , a 8 kg jabuka i 7 kg marelica treba platiti 40 € . Kolika je cijena jabuka i marelica po kilogramu? Koliko treba platiti 2 kg jabuka i 6 kg marelica?

x = cijena 1 kg jabuka
 y = cijena 1 kg marelica

5 kg jabuka i 3 kg marelica koštaju 19.5 € :
 8 kg jabuka i 7 kg marelica koštaju 40 € :

$$\begin{aligned} 5x + 3y &= 19.5 \\ 8x + 7y &= 40 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5x + 3y &= 19.5 \quad / \cdot 8 \\ 8x + 7y &= 40 \quad / \cdot (-5) \\ 40x + 24y &= 156 \\ -40x - 35y &= -200 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} +$$

$$\begin{aligned} -11y &= -44 \quad / : (-11) \\ y &= 4 \text{ €} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8x + 7y &= 40 \\ 8x + 28 &= 40 \\ 8x &= 12 \quad / : 8 \\ x &= 1.5 \text{ €} \end{aligned}$$

Cijena 1 kg jabuka je 1.5 € , a marelica 4 € .

2 kg jabuka i 6 kg marelica: $2 \cdot 1.5 + 6 \cdot 4 = 3 + 24 = 27 \text{ €}$ 2 kg jabuka i 6 kg marelica treba platiti 27 € .

9) Na kvizu je postavljeno 50 pitanja svakoj ekipi. Za svaki se ispravan odgovor priznaje 5 boda, a za netočan se odgovor oduzimaju 2 boda. Koliko je pitanja točno, a koliko netočno odgovoreno ako je ekipa „Malci“ odgovorila na sva pitanja i time ostvarila 194 boda?

x – broj točno odgovorenih pitanja

Ukupno 50 pitanja:

$$x + y = 50$$

y – broj netočno odgovorenih pitanja

Ukupno 194 boda:

$$5x - 2y = 194$$

$$\begin{array}{r} x + y = 50 \quad / \cdot 2 \\ 5x - 2y = 194 \\ \hline 2x + 2y = 100 \\ 5x - 2y = 194 \quad \left. \vphantom{\begin{array}{r} 2x + 2y = 100 \\ 5x - 2y = 194 \end{array}} \right\} + \\ \hline 7x = 294 \quad / : 7 \\ \boxed{x = 42} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x + y = 50 \\ 42 + y = 50 \\ \boxed{y = 8} \end{array}$$

Ekipa „Malci“ točno je odgovorila na 42, a netočno na 8 pitanja.

10) Odredi koordinate točaka u kojima pravac $y = -\frac{4}{3}x + 2$ siječe koordinatne osi.

Sjecište s y – osi: $\boxed{b = 2}$
Točka (0, 2).

Sjecište s x – osi (NULTOČKA): $\boxed{y = 0}$

$$\begin{array}{r} 0 = -\frac{4}{3}x + 2 \quad / \cdot 3 \\ 0 = -4x + 6 \\ 4x = 6 \quad / : 4 \\ \boxed{x = \frac{3}{2}} \end{array}$$

Rješenje: Pravac siječe x – os u točki $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, y – os u točki (0, 2).

11) Odredi eksplicitnu jednadžbu pravca koji ima nagib -4 i prolazi točkom A (−2, 3).

$$\begin{array}{rcl} \text{nagib} & \Rightarrow & \boxed{a = -4} \\ A(-2, 3) & \Rightarrow & \boxed{x = -2} \\ & & \boxed{y = 3} \end{array} \quad \begin{array}{r} y = ax + b \\ 3 = -4 \cdot (-2) + b \\ 3 = 8 + b \\ \boxed{b = -5} \end{array}$$

Rješenje: $\boxed{y = -4x - 5}$

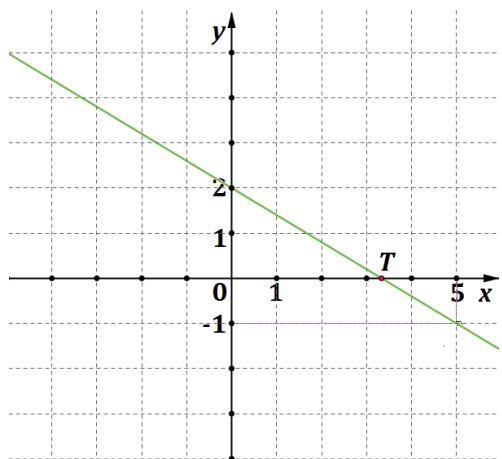
12) Točka M (−1, −6) pripada pravcu $y = ax - 8$. Odredi jednadžbu pravca.
Je li linearna ovisnost rastuća ili padajuća?

$$\begin{array}{rcl} M(-1, -6) & \Rightarrow & \boxed{x = -1} \\ & & \boxed{y = -6} \end{array} \quad \begin{array}{r} y = ax - 8 \\ -6 = -a - 8 \\ \boxed{a = -2} \end{array}$$

Rješenje: $\boxed{y = -2x - 8}$

Linearna ovisnost je padajuća.

13) Zadana je linearna ovisnost $y = -\frac{3}{5}x + 2$.



a) Nacrtaj njezin graf. Odsječak na y -osi je 2, od točke $(0, 2)$ pomičemo se 3 jed. dužine **dolje** i 5 **desno**.

b) Odredi:

► nagib $a = -\frac{3}{5}$ ► odsječak na y -osi $b = 2$

c) Pada li ili raste pravac? Pravac pada.

d) Na grafu očitaj točku kojoj je **apscisa** 5. $(5, -1)$

e) Kakav kut zatvara pravac s pozitivnim dijelom x -osi?
Zatvara tupi kut.

f) Izračunaj nultočku T i naznači je na grafu linearne ovisnosti.

Nultočka:

$$y = 0$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{3}{5}x + 2 \quad / \cdot 5$$

$$0 = -3x + 10$$

$$3x = 10 \quad / : 3$$

$$x = \frac{10}{3}$$

$$T\left(\frac{10}{3}, 0\right)$$

14) Odredi eksplicitnu jednadžbu pravca koji prolazi točkama $A(-1, -5)$ i $B(-2, 6)$.

$$y = ax + b$$

$$\begin{matrix} A(-1, -5) \\ B(-2, 6) \end{matrix}$$

$\Rightarrow$

$$-5 = -a + b$$

$$6 = -2a + b$$

$$a - b = 5 \quad / \cdot (-1)$$

$$2a - b = -6$$

$$-a + b = -5$$

$$2a - b = -6$$

$$a = -11$$

} +

$$a - b = 5$$

$$-11 - b = 5$$

$$b = -16$$

Jednadžba pravca: $y = -11x - 16$

15) Koliki je koeficijent smjera pravca **usporednog** s pravcem $3x - 2y + 5 = 0$.

Jednadžbu pravca trebamo zapisati u eksplicitnom obliku kako bismo očitali nagib.

Pravci su usporedni ako imaju jednake nagibe.

Eksplicitni oblik jednadžbe pravca:

$$3x - 2y + 5 = 0$$

$$-2y = -3x - 5 \quad / : (-2)$$

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$$

$\Rightarrow$ Koeficijent smjera je $\frac{3}{2}$.

16) Odredi racionalni broj m za koji su pravci $y = (3m + 1)x - 2$ i $y = \left(\frac{m}{2} + 6\right)x + 6$ usporedni.

Pravci su usporedni ako imaju isti nagib:

$$3m + 1 = \frac{m}{2} + 6 \quad / \cdot 2$$

$$6m + 2 = m + 12$$

$$5m = 10 \quad / : 5$$

$$m = 2$$

17) Grafički i računski riješi sustav. U kakvom su odnosu pravci i rješenje sustava jednadžbi?

a) $x + 2y = 8$
 $y = -5x - 5$

b) $y = 2x + 1$
 $-6x + 3y - 3 = 0$

c) $3y = -2x - 3$
 $y = -\frac{2}{3}x + 5$

a) **Računski:**

$$\begin{aligned} x + 2y &= 8 \\ y &= -5x - 5 \\ x + 2(-5x - 5) &= 8 \\ x - 10x - 10 &= 8 \\ -9x &= 18 \quad / : (-9) \\ x &= -2 \\ y &= -5x - 5 \\ y &= 10 - 5 \\ y &= 5 \end{aligned}$$

Rj: $(-2, 5)$

Grafički:

$$y = -\frac{1}{2}x + 4$$

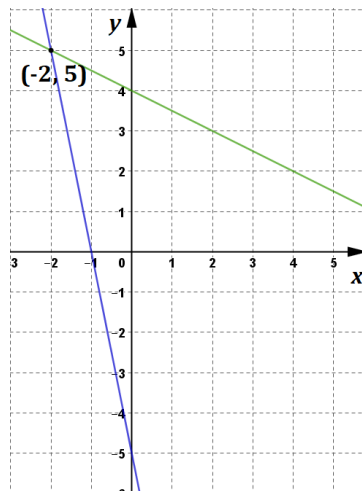
odsječak: 4

$a = \frac{-1}{2}$ → 1 dolje
 → 2 desno

$$y = -5x - 5$$

odsječak: -5

$a = \frac{5}{1}$ → 5 gore
 → 1 desno



Sustav ima jedno rješenje, pravci se sijeku u točki $(-2, 5)$.

b) **Računski:**

$$\begin{aligned} y &= 2x + 1 \\ -6x + 3y - 3 &= 0 \\ -6x + 3(2x + 1) - 3 &= 0 \\ -6x + 6x + 3 - 3 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Beskonačno mnogo rj.

Grafički:

$$y = 2x + 1$$

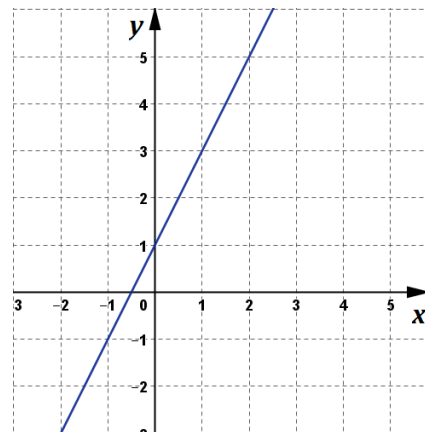
odsječak: 1

$a = \frac{2}{1}$ → 2 gore
 → 1 desno

$$-6x + 3y - 3 = 0$$

$$3y = 6x + 3 \quad / : 3$$

$$y = 2x + 1$$



Iste su jednadžbe!

Sustav ima beskonačno mnogo rješenja, pravci se podudaraju.

c) Računski:

$$y = -\frac{2}{3}x - 1 \quad / \cdot 3$$

$$y = -\frac{2}{3}x + 5 \quad / \cdot 3$$

$$3y = -2x - 3$$

$$3y = -2x + 15$$

$$2x + 3y = -3 \quad / \cdot (-1)$$

$$2x + 3y = 15$$

$$\begin{array}{r} -2x - 3y = 3 \\ 2x + 3y = 15 \\ \hline 0 = 18 \end{array} \quad +$$

Nema rješenja!

Grafički:

$$y = -\frac{2}{3}x - 1$$

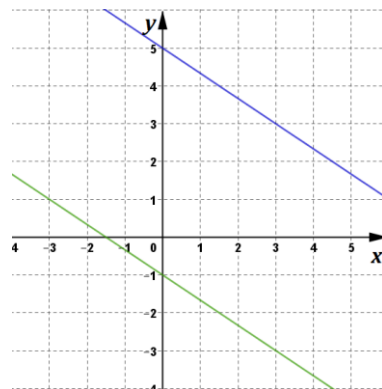
odsječak: -1

$$a = \frac{-2}{3} \rightarrow \begin{array}{l} 2 \text{ dolje} \\ 3 \text{ desno} \end{array}$$

$$y = -\frac{2}{3}x + 5$$

odsječak: 5

$$a = \frac{-2}{3} \rightarrow \begin{array}{l} 2 \text{ dolje} \\ 3 \text{ desno} \end{array}$$



Sustav nema rješenja, pravci su usporedni.

18) Zaokruži pravac koji **najbrže raste**:

a) $y = -\frac{1}{6}x + 6$

b) $y = -6x + 3$

c) $y = \frac{1}{6}x + 6$

d) $y = 6x + 3$

Najbrže raste onaj pravac koji ima **najveći** nagib.

19) Zaokruži pravac koji **najbrže pada**:

a) $y = -\frac{1}{6}x + 6$

b) $y = -6x + 3$

c) $y = \frac{1}{6}x + 6$

d) $y = 6x + 3$

Najbrže pada onaj pravac koji ima **najmanji** nagib.