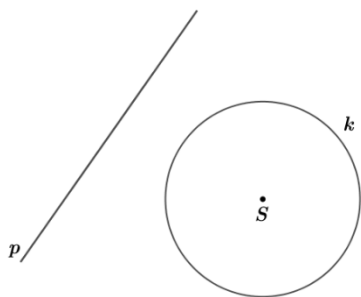


Međusoban položaj dviju kružnica, odnos pravca i kružnice

- 1) Nacrtaј dvije kružnice $k_1(S_1, r_1 = 4 \text{ cm})$ i $k_2(S_2, r_2 = 15 \text{ mm})$, koje:
 - a) se dodiruju izvana,
 - b) nemaju zajedničkih točaka,
 - c) se sijeku,
 - d) se dodiruju iznutra.
- 2) Zadane su kružnice polumjera duljine 7 cm i 3 cm , a njihova su središta udaljena 3 cm . U kakvom su položaju te kružnice?
- 3) Središta S_1 i S_2 kružnica $k_1(S_1, r_1 = 45 \text{ mm})$ i $k_2(S_2, r_2 = 35 \text{ mm})$ udaljena su 9 cm . Koliko zajedničkih točaka imaju te kružnice?
- 4) Središta S_1 i S_2 kružnica $k_1(S_1, r_1 = 5 \text{ cm})$ i $k_2(S_2, r_2 = 3 \text{ cm})$ udaljena su 2 cm . Koliko zajedničkih točaka imaju te kružnice?
- 5) Središta S_1 i S_2 kružnica $k_1(S_1, r_1 = 35 \text{ mm})$ i $k_2(S_2, r_2 = 6 \text{ cm})$ udaljena su 4 cm . U kakvom su položaju te kružnice?
- 6) Zadane su kružnice polumjera duljine 5 cm i 4 cm , a njihova su središta udaljena 9 cm . U kakvom su položaju te kružnice? Koliko imaju zajedničkih točaka?

NAPOMENA: Samo se 1. zadatak crta, zadatci od 2. do 6. rješavaju se računski (bez crtanja).

- 7) Nacrtaj kružnicu $k(S, 2\text{ cm})$ i točku $A \in k$. Konstruiraj **tangentu** kružnice koja prolazi točkom A .
- 8) Nacrtaj kružnicu $k(S, 35\text{ mm})$ te odaberi točke A i B na toj kružnici.
Konstruiraj **tangente** kružnice s diralištima u točkama A i B .
- 9) Nacrtaj pravac p i izvan njega odaberi točku S .
Konstruiraj kružnicu sa središtem u točki S kojoj je pravac p tangenata.
- 10) Nacrtaj **tangente** kružnice k koje su **usporedne** sa zadanim pravcem p .



- 11) Pravac koji dira kružnicu u jednoj točki naziva se _____ kružnice.
Točka u kojoj pravac dira kružnicu naziva se _____.
- 12) Tangenta kružnice **OKOMITA JE / PARALELNA JE** na polumjer kružnice. (Zaokruži točan odgovor)
- 13) Pravac koji siječe kružnicu u dvjema različitim točkama naziva se _____ kružnice.
- 14) Kako se zove dio sekante koji leži unutar kruga? _____

Vjerojatnost slučajnog događaja

1) Bačena je igračka kockica. Koja je vjerojatnost sljedećih događaja:

- a) pao je broj 3 b) pao je broj 12 c) pao je broj veći od 1
d) pao je višekratnik broja 3 e) pao je složen broj f) pao je jednoznamenasti broj



2) U košari se nalaze 15 plavih, 9 crvenih, 8 ljubičastih i 18 zelenih lopti.

Kolika je vjerojatnost (izražena u postotku) da izvučena loptica bude:

- a) crvena, b) plava ili ljubičasta, c) crna?

3) Vjerojatnost da se pobijedi u igri je $\frac{9}{10}$, koja je vjerojatnost da se izgubi u igri? _____

4) Kako se naziva događaj čija je vjerojatnost 0? _____

5) Kako se naziva događaj čija je vjerojatnost 1? _____

6) Snop karata sadrži 52 karte u četiri boje: **karo**, **herc**, **pik** i **tref**.

Svaka boja ima po 13 karata.

Koja je vjerojatnost da izvučena karta:



- a) bude pik? b) bude karo ili tref? c) bude dečko? d) bude trefov as?

7) Na svaki listić upisano je po jedno slovo riječi **VJEROJATNOST**.

Kolika je vjerojatnost (u postotku) da je izvučen listić na kojemu je **samoglasnik**?

Jednostavni kamatni račun

1) Lana je u banci položila 6 000 € na štednju.

Koliki će iznos Lana dobiti nakon 5 godina uz godišnju kamatnu stopu od 8 %?

2) Na koji je rok otplate Ivan uzeo kredit od 56 000 € uz godišnju kamatnu stopu od 3.6 %

ako je banci vratio iznos od 61 544 €?

3) Gospodin Majić na računu ima 41 000 € i za taj je iznos nakon četiri godine štednje primio 3 280 € kamata.

Koja mu je kamatna stopa za štednju?

4) Koliko treba uložiti u banku da se nakon 4 godine dobije kamata od 200 € uz kamatnu stopu 2 %?

5) Uz koliku kamatnu stopu ulog od 4 000 € nakon 15 mjeseci naraste na 4 175 €?

6) Koje je vrijeme potrebno da glavnica od 1 200 € uz godišnju kamatnu stopu od 1.5 € donese kamate 180 €?

7) Kolike se kamate moraju vratiti ako je uzet kredit od 11 500 € na vrijeme od 36 mjeseci uz godišnju kamatnu stopu od 6 %?

Rješenja:

Međusoban položaj dviju kružnica, odnos pravca i kružnice

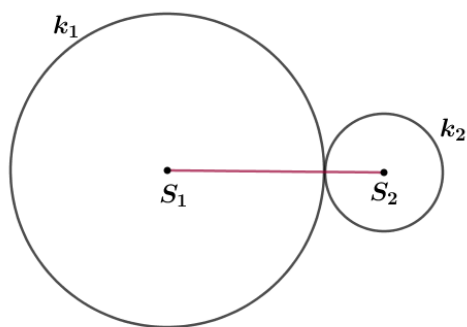
1) Nacrtaj dvije kružnice $k_1(S_1, r_1 = 4 \text{ cm})$ i $k_2(S_2, r_2 = 15 \text{ mm})$, koje:

a) se dodiruju izvana

⇒ udaljenost središta mora biti

JEDNAKA zbroju radijusa

$$\Rightarrow |S_1S_2| = 5.5 \text{ cm} \quad [r_1 + r_2 = 5.5 \text{ cm}]$$



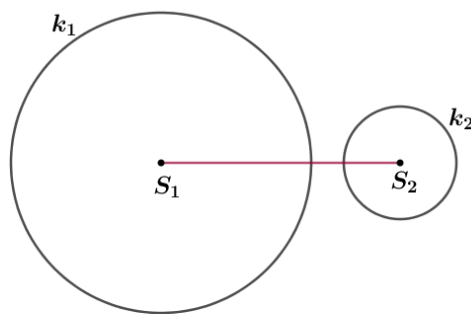
$$|S_1S_2| = 5.5 \text{ cm}$$

b) nemaju zajedničkih točaka

⇒ udaljenost središta mora biti

VEĆA od zbroju radijusa

$$\Rightarrow |S_1S_2| > 5.5 \text{ cm}$$



$$|S_1S_2| > 5.5 \text{ cm}$$

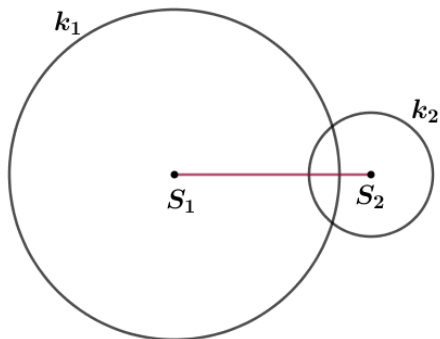
c) se sijeku

⇒ udaljenost središta mora biti

MANJA od zbroja i **VEĆA od razlike** radijusa

$$\Rightarrow r_1 + r_2 = 5.5 \text{ cm} \quad \text{te} \quad r_1 - r_2 = 2.5 \text{ cm}$$

⇒ udaljenost središta mora biti između 5.5 cm i 2.5 cm



$$|S_1S_2| < 5.5 \text{ cm}$$

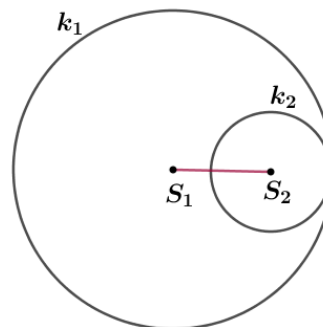
$$|S_1S_2| > 2.5 \text{ cm}$$

d) se dodiruju iznutra

⇒ udaljenost središta mora biti

JEDNAKA razlici radijusa

$$\Rightarrow |S_1S_2| = 2.5 \text{ cm} \quad [r_1 - r_2 = 2.5 \text{ cm}]$$



$$|S_1S_2| = 2.5 \text{ cm}$$

2) Zadane su kružnice polumjera duljine 7 cm i 3 cm, a njihova su središta udaljena 3 cm.

U kakvom su položaju te kružnice?

zbroj radijusa: $r_1 + r_2 = 10 \text{ cm}$

► $|S_1S_2|$ je manja od razlike

razlika radijusa: $r_1 - r_2 = 4 \text{ cm}$

► Kružnice su jedna unutar druge.

3) Središta S_1 i S_2 kružnica $k_1(S_1, r_1 = 45 \text{ mm})$ i $k_2(S_2, r_2 = 35 \text{ mm})$ udaljena su 9 cm.

Koliko zajedničkih točaka imaju te kružnice?

zbroj radijusa: $r_1 + r_2 = 8 \text{ cm}$

► $|S_1S_2|$ je veća od zbroja

► kružnice su razdvojene

► Kružnice nemaju zajedničkih točaka.

4) Središta S_1 i S_2 kružnica $k_1(S_1, r_1 = 5 \text{ cm})$ i $k_2(S_2, r_2 = 3 \text{ cm})$ udaljena su 2 cm.

Koliko zajedničkih točaka imaju te kružnice?

zbroj radijusa: $r_1 + r_2 = 8 \text{ cm}$

► $|S_1S_2|$ je jednaka razlici

razlika radijusa: $r_1 - r_2 = 2 \text{ cm}$

► kružnice se dodiruju iznutra

► Kružnice imaju jednu zajedničku točku.

5) Središta S_1 i S_2 kružnica $k_1(S_1, r_1 = 35 \text{ mm})$ i $k_2(S_2, r_2 = 6 \text{ cm})$ udaljena su 4 cm.

U kakvom su položaju te kružnice?

zbroj radijusa: $r_1 + r_2 = 9.5 \text{ cm}$

► $|S_1S_2|$ je između zbroja i razlike

razlika radijusa: $r_1 - r_2 = 2.5 \text{ cm}$

► Kružnice se sijeku u dvije točke.

6) Zadane su kružnice polumjera duljine 5 cm i 4 cm, a njihova su središta udaljena 9 cm.

U kakvom su položaju te kružnice? Koliko imaju zajedničkih točaka?

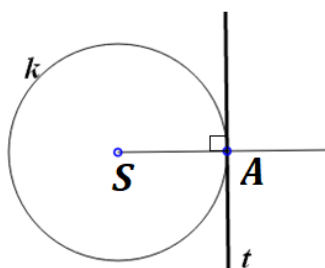
zbroj radijusa: $r_1 + r_2 = 9 \text{ cm}$

► $|S_1S_2|$ je jednaka zbroju

► Kružnice se dodiruju izvana.

► Kružnice imaju jednu zajedničku točku.

7) Nacrtaj kružnicu $k(S, 2 \text{ cm})$ i točku $A \in k$. Konstruiraj **tangentu** kružnice koja prolazi točkom A .



► odaberemo točku A na kružnici

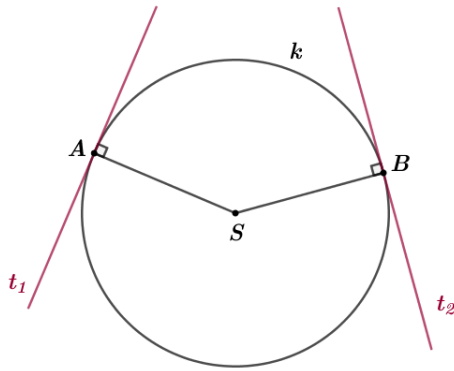
► nacrtamo polupravac SA

► nacrtamo (konstruiramo) okomicu na SA u točki A

⇒ tangenta t

8) Nacrtaj kružnicu k (S , 35 mm) te odaberi točke A i B na toj kružnici.

Konstruiraj **tangente** kružnice s diralištima u točkama A i B .

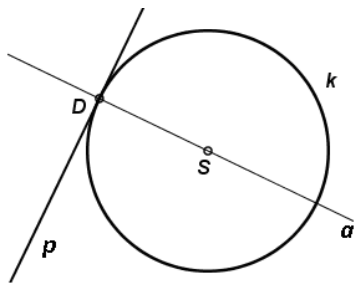


Analogno kao u prethodnom zadatku, samo konstruiramo dvije tangente.

- ▶ odaberemo točku A na kružnici
- ▶ nacrtamo polumjer $\overline{SA}$
- ▶ nacrtamo okomicu na $\overline{SA}$ u točki $A \Rightarrow$ tangenta t_1
- ▶ odaberemo točku B na kružnici
- ▶ nacrtamo polumjer $\overline{SB}$
- ▶ nacrtamo okomicu na $\overline{SB}$ u točki $B \Rightarrow$ tangenta t_2

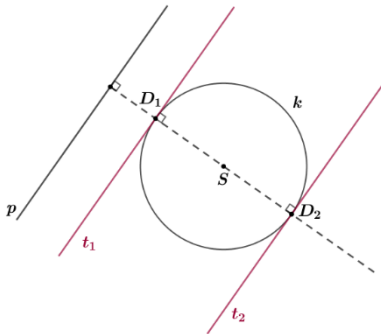
9) Nacrtaj pravac p i izvan njega odaberi točku S .

Konstruiraj kružnicu sa središtem u točki S kojoj je pravac p tangenata.



- ▶ okomica na pravac p kroz točku S siječe kružnicu k u točki D (diralištu)
- ▶ $k(S, |SD|)$, tj. nacrtamo kružnicu sa središtem u točki S duljine polumjera $|SD|$

10) Nacrtaj **tangente** kružnice k koje su **usporedne** sa zadanim pravcem p .



- ▶ okomica na pravac p siječe kružnicu k u dvjema točkama D_1 i D_2
- ▶ okomica na pravac p (ili pravac D_1D_2) u točki $D_1 \Rightarrow$ tangenta t_1
- ▶ okomica na pravac p (ili pravac D_1D_2) u točki $D_2 \Rightarrow$ tangenta t_2

11) Pravac koji dira kružnicu u jednoj točki naziva se tangenta kružnice.

Točka u kojoj pravac dira kružnicu naziva se diralište.

12) Tangenta kružnice **OKOMITA JE** PARALELNA JE na polumjer kružnice. (Zaokruži točan odgovor)

13) Pravac koji siječe kružnicu u dvjema različitim točkama naziva se sekanta kružnice.

14) Kako se zove dio sekante koji leži unutar kruga? Tetiva.

Vjerojatnost slučajnog događaja

1) Bačena je igračka kockica. Koja je vjerojatnost sljedećih događaja:

a) pao je broj 3

b) pao je broj 12

c) pao je broj veći od 1

d) pao je višekratnik broja 3

e) pao je složen broj

f) pao je jednoznamenasti broj



a) $A = \{\text{pao je broj 3}\}$ (želimo)

$$|A| = 1$$

$B = \{\text{pao je broj 1, 2, 3, 4, 5 ili 6}\}$ (svi ishodi)

$$|B| = 6$$

$$P(A) = \frac{1}{6}$$

b) $A = \{\text{pao je broj 12}\}$ (želimo)

$$|A| = 0 \Rightarrow \text{na kockici nema broja 12}$$

$B = \{\text{pao je broj 1, 2, 3, 4, 5 ili 6}\}$

$$|B| = 6$$

$$P(A) = \frac{0}{6} = 0$$

[nemoguć događaj]

c) $A = \{\text{pao je broj 2, 3, 4, 5 ili 6}\}$

$$|A| = 5$$

$B = \{\text{pao je broj 1, 2, 3, 4, 5 ili 6}\}$

$$|B| = 6$$

$$P(A) = \frac{5}{6}$$

d) $A = \{\text{pao je broj 3 ili 6}\}$

$$|A| = 2$$

$B = \{\text{pao je broj 1, 2, 3, 4, 5 ili 6}\}$

$$|B| = 6$$

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

e) $A = \{\text{pao je broj 2, 4 ili 6}\}$

$$|A| = 3$$

$B = \{\text{pao je broj 1, 2, 3, 4, 5 ili 6}\}$

$$|B| = 6$$

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

f) $A = \{\text{pao je broj 1, 2, 3, 4, 5 ili 6}\}$

$$|A| = 6$$

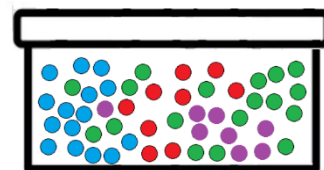
$B = \{\text{pao je broj 1, 2, 3, 4, 5 ili 6}\}$

$$|B| = 6$$

$$P(A) = \frac{6}{6} = 1$$

[siguran događaj]

- 2) U košari se nalaze 15 plavih, 9 crvenih, 8 ljubičastih i 18 zelenih lopti.
Kolika je vjerojatnost (izražena u postotku) da izvučena loptica bude:



a) crvena,

b) plava ili ljubičasta,

c) crna?

$$A = \{\text{izvučena je crvena lopta}\}$$

$$|A| = 9$$

$$A = \{\text{izvučena je P ili LJ lopta}\}$$

$$|A| = 23$$

$$A = \{\text{izvučena je crna lopta}\}$$

$$|A| = 0$$

$$B = \{\text{izvučena je lopta}\}$$

$$|B| = 50$$

$$B = \{\text{izvučena je lopta}\}$$

$$|B| = 50$$

$$B = \{\text{izvučena je lopta}\}$$

$$|B| = 50$$

$$P(A) = \frac{9}{50} = \frac{18}{100} = 18 \%$$

$$P(A) = \frac{23}{50} = \frac{46}{100} = 46 \%$$

$$P(A) = \frac{0}{50} = 0 \%$$

- 3) Vjerojatnost da se pobijedi u igri je $\frac{9}{10}$, koja je vjerojatnost da se izgubi u igri? $\frac{1}{10}$

- 4) Kako se naziva događaj čija je vjerojatnost 0? **Nemoguć događaj.**

- 5) Kako se naziva događaj čija je vjerojatnost 1? **Siguran događaj.**

- 6) Snop karata sadrži 52 karte u četiri boje: **karo**, **herc**, **pik** i **tref**.

Svaka boja ima po 13 karata.

Koja je vjerojatnost da izvučena karta:



a) bude pik?

b) bude karo ili tref?

c) bude dečko?

d) bude trefov as?

$$a) A = \{\text{izvučen je pik}\}$$

$$|A| = 13 \text{ (13 karata po boji)}$$

$$b) A = \{\text{izvučen je tref ili karo}\}$$

$$|A| = 26 \text{ (13 + 13)}$$

$$B = \{\text{izvučena je karta}\}$$

$$|B| = 52$$

$$B = \{\text{izvučena je karta}\}$$

$$|B| = 52$$

$$P(A) = \frac{13}{52}$$

$$P(A) = \frac{1}{4}$$

$$P(A) = \frac{26}{52}$$

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

c) $A = \{\text{izvučen je dečko}\}$

$$|A| = 4 \text{ (po 1 dečko u svakoj boji)}$$

$B = \{\text{izvučena je karta}\}$

$$|B| = 52$$

$$P(A) = \frac{4}{52}$$

$$P(A) = \frac{1}{13}$$

d) $A = \{\text{izvučen je trefov as}\}$

$$|A| = 1 \text{ (samo je jedan as u boji tref)}$$

$B = \{\text{izvučena je karta}\}$

$$|B| = 52$$

$$P(A) = \frac{1}{52}$$

7) Na svaki listić upisano je po jedno slovo riječi **VJEROJATNOST**.

Kolika je vjerojatnost (u postotku) da je izvučen listić na kojemu je **samoglasnik**?



$A = \{\text{izvučen je listić sa samoglasnikom}\}$

$$|A| = 4$$

$B = \{\text{izvučen je listić sa slovom}\}$

$$|B| = 12$$

$$P(A) = \frac{4}{12}$$

$$P(A) = \frac{1}{3}$$

$$P(A) = 0.3333$$

$$P(A) \approx 33 \%$$

$\Rightarrow$

$$k = s \cdot g \cdot t$$

1) Lana je u banci položila 6 000 € na štednju.

Koliki će iznos Lana dobiti nakon 5 godina uz godišnju kamatnu stopu od 8 %?

$$g = 6\,000 \text{ €}$$

$$t = 5 \text{ god}$$

$$s = 8 \%$$

$$k = ?$$

$$k = s \cdot g \cdot t$$

$$k = \frac{8}{100} \cdot 6\,000 \cdot 5$$

$$k = 2\,400 \text{ €}$$

Nakon 5 godina Lana će dobiti 2 400 €.

2) Na koji je rok otplate Ivan uzeo kredit od 56 000 € uz godišnju kamatnu stopu od 3.6 %

ako je banci vratio iznos od 61 544 €?

$$g = 56\,000 \text{ €}$$

$$s = 3.6 \%$$

$$k = 5\,544 \text{ €} \quad [k = 61\,544 - 56\,000]$$

$$t = ?$$

$$s \cdot g \cdot t = k$$

$$\frac{36}{1000} \cdot 56\,000 \cdot t = 5544$$

$$36 \cdot 56 t = 5544 \quad / : (36 \cdot 56)$$

$$t = \frac{5544}{36 \cdot 56}$$

$$t = 2\frac{3}{4} \text{ godine}$$

$$\frac{1}{4} \text{ godine} = 3 \text{ mjeseca}$$

$$\frac{3}{4} \text{ godine} = 9 \text{ mjeseci}$$

Ivan je uzeo kredit na rok otplate 2 godine i 9 mjeseci.

3) Gospodin Majić na računu ima 41 000 € i za taj je iznos nakon četiri godine štednje primio 3 280 € kamata.

Koja mu je kamatna stopa za štednju?

$$g = 41\,000 \text{ €}$$

$$t = 4 \text{ god}$$

$$k = 3\,280 \text{ €}$$

$$s = ?$$

$$s \cdot g \cdot t = k$$

$$s \cdot 41\,000 \cdot 4 = 3\,280 \quad / : 41\,000 \cdot 4$$

$$s = \frac{3\,280}{41\,000 \cdot 4}$$

$$s = \frac{82}{4100} = 0.02$$

$$s = 2 \%$$

Kamatna stopa na štednju iznosi 2 %.

4) Koliko treba uložiti u banku da se nakon 4 godine dobije kamata od 200 € uz kamatnu stopu 2 %?

$$\begin{aligned} t &= 4 \text{ god} \\ k &= 200 \text{ €} \\ \underline{s &= 2 \%} \\ g &= ? \end{aligned}$$

$$s \cdot g \cdot t = k$$

$$\frac{2}{100} \cdot g \cdot 4 = 200 \quad / \cdot 100$$

$$8g = 20\,000 \quad / : 8$$

$$g = 2\,500 \text{ €}$$

Treba uložiti 2 500 €.

5) Uz koliku kamatnu stopu ulog od 4 000 € nakon 15 mjeseci naraste na 4 175 €?

$$\begin{aligned} g &= 4\,000 \text{ €} \\ t &= 15 \text{ mj} = 1\frac{1}{4} \text{ god} \\ \underline{k &= 175 \text{ €}} \\ s &= ? \end{aligned}$$

$$[k = 4\,175 - 4\,000]$$

$$\begin{aligned} 15 \text{ mjeseci} &= 1 \text{ god } 3 \text{ mjeseca} \\ &= 1\frac{1}{4} \text{ godine} \end{aligned}$$

$$s \cdot g \cdot t = k$$

$$s \cdot 4\,000 \cdot 1\frac{1}{4} = 175$$

$$5\,000 s = 175 \quad / : 5\,000$$

$$s = 0.035$$

$$s = 3.5\%$$

Ulog će narasti na 4 175 € uz kamatnu stopu 3.5%.

6) Koje je vrijeme potrebno da glavnica od 1 200 € uz godišnju kamatnu stopu od 1.5 € donese kamate 180 €?

$$\begin{aligned} g &= 1\,200 \text{ €} \\ s &= 1.5 \% \\ \underline{k &= 180 \text{ €}} \\ t &= ? \end{aligned}$$

$$s \cdot g \cdot t = k$$

$$\frac{1.5}{100} \cdot 1\,200 \cdot t = 180$$

$$18 t = 180 \quad / : 18$$

$$t = 10 \text{ god}$$

Potrebno je 10 godina.

7) Kolike se kamate moraju vratiti ako je uzet kredit od 11 500 € na vrijeme od 36 mjeseci uz godišnju kamatnu stopu od 6 %?

$$g = 11\,500 \text{ €}$$

$$t = 3 \text{ god}$$

$$\underline{s = 6 \%}$$

$$k = ?$$

36 mjeseci = 3 godine

$$k = s \cdot g \cdot t$$

$$k = \frac{6}{100} \cdot 11\,500 \cdot 3$$

$$k = 2\,070 \text{ €}$$

Potrebno je vratiti 2 070 € kamata.