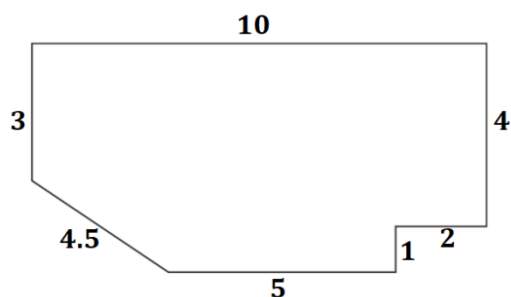


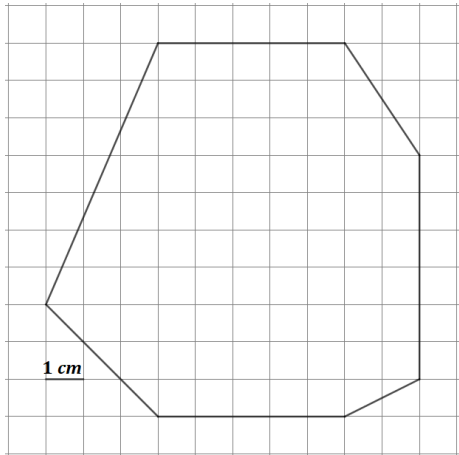
Mnogokuti

– priprema za ispit znanja –

- 1) Pravilni mnogokut ima 18 vrhova. Odredi:
 - a) broj dijagonala iz jednog vrha
 - b) ukupan broj dijagonala
 - c) zbroj veličina unutarnjih kutova
 - d) veličinu vanjskog kuta
- 2) Odredi veličinu unutarnjeg i vanjskog kuta pravilnog 12 – terokuta.
- 3) Zbroj veličina unutarnjih kutova nekog mnogokuta iznosi 2160° . Koji je to mnogokut?
- 4) Koliko dijagonala ima pravilni mnogokut čiji je vanjski kut veličine 15° ?
- 5) Ukupan broj dijagonala pravilnog mnogokuta opisanog u kružnici polumjera duljine 27 mm je 20. Duljina jedne stranice mnogokuta je 3.6 cm. Izračunaj opseg i površinu tog mnogokuta.
- 6) Koliko ima dijagonala iz jednog vrha ima mnogokut kojemu je veličina središnjeg kuta 12° ?
- 7) Koji mnogokut ima unutarnji kut veličine 160° ?
- 8) Kod kojeg je mnogokuta zbroj veličina unutarnjih kutova za $1\ 800^\circ$ veći od zbroja veličina svih vanjskih kutova tog mnogokuta?
- 9) U nekom pravilnom mnogokutu moguće je iz jednog vrha povući 15 dužina tako da im krajevi budu vrhovi mnogokuta. Koji je to mnogokut?
- 10) Izračunaj veličine kutova karakterističnog trokuta pravilnog dvanaesterokuta.
- 11) Konstruiraj pravilni **osmerokut** s polumjerom opisane mu kružnice 3 cm.
- 12) Nacrtaj pravilni **peterokut** duljine stranice $a = 4\text{ cm}$.
- 13) Konstruiraj pravilni 12 – terokut upisan u kružnicu promjera 8 cm.
- 14) Izračunaj opseg i površinu pravilnog 18 – terokuta duljine stranice 4.9 cm i polumjera upisane kružnice 16 mm.
- 15) Opseg pravilnog četrnaesterokuta iznosi 33.6 cm. Izračunaj duljinu jedne njegove stranice.
- 16) Izračunaj opseg i površinu mnogokuta sa slike:



17) Izračunaj površinu mnogokuta sa slike:



18) Koliki je opseg i površina pravilnog **deveterokuta** ako je duljina njegove stranice 3.7 cm , a duljina polumjera opisane mu kružnice 28 mm ? [Rješenje izrazi u cm ili cm^2 .]

RJEŠENJA:

1) Mnogokut ima 18 vrhova. Odredi:

a) broj dijagonala iz jednog vrha

$$d_n = n - 3$$

$$d_{18} = 18 - 3$$

$$\boxed{d_{18} = 15}$$

b) ukupan broj dijagonala

$$D_n = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$$

$$D_{18} = \frac{18 \cdot (18 - 3)}{2}$$

$$D_{18} = \frac{18^9 \cdot 15}{2^1}$$

$$\boxed{D_{18} = 135}$$

c) zbroj veličina unutarnjih kutova

$$K_{18} = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

$$K_{18} = (18 - 2) \cdot 180^\circ$$

$$K_{18} = 16 \cdot 180^\circ$$

$$\boxed{K_{18} = 2\,880^\circ}$$

d) veličinu vanjskog kuta

$$\beta'_n = \frac{360^\circ}{n}$$

$$\beta'_{18} = \frac{360^\circ}{18}$$

$$\boxed{\beta'_{18} = 20^\circ}$$

2) Odredi veličinu unutarnjeg i vanjskog kuta pravilnog 12 – terokuta.

$$\frac{n = 12}{\beta_n = ?, \quad \beta'_n = ?}$$

$$\beta_n = \frac{K_n}{n}$$

$$\beta_{12} = \frac{(12 - 2) \cdot 180^\circ}{12}$$

$$\beta_{12} = \frac{10^5 \cdot 180^\circ}{12^6 1}$$

$$\boxed{\beta_{12} = 150^\circ}$$

unutarnji + vanjski = 180°

$$\beta'_{12} = 180^\circ - 150^\circ$$

$$\boxed{\beta'_{12} = 30^\circ}$$

ili

ili

formula:

$$\beta'_n = \frac{360^\circ}{n}$$

$$\beta'_{12} = \frac{360^\circ}{12}$$

$$\boxed{\beta'_{12} = 30^\circ}$$

3) Zbroj veličina unutarnjih kutova nekog mnogokuta iznosi 2 160°. Koji je to mnogokut?

$$K_n = 2\,160^\circ$$

$$(n - 2) \cdot 180^\circ = 2\,160^\circ \quad / :180^\circ$$

$$n - 2 = 12$$

$$\boxed{n = 14}$$

Zadan je 14 – terokut.

4) Koliko dijagonala ima pravilni mnogokut čiji je vanjski kut veličine 15° ?

$$\begin{aligned} \beta_n' &= 15^\circ \\ \frac{360^\circ}{n} &= 15^\circ \quad / \cdot n \\ 15^\circ n &= 360^\circ \quad / : 15^\circ \\ \boxed{n = 24} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{n \cdot (n-3)}{2} \\ D_{24} &= \frac{24 \cdot 21}{2} \\ \boxed{D_{24} = 252} \end{aligned}$$

Mnogokut ima 252 dijagonala.

5) Ukupan broj dijagonala pravilnog mnogokuta opisanog u kružnici polumjera duljine 27 mm je 20. Duljina jedne stranice mnogokuta je 3.6 cm . Izračunaj opseg i površinu tog mnogokuta.

$$\begin{aligned} D_n &= 20 \\ \frac{n \cdot (n-3)}{2} &= 20 \quad / \cdot 2 \\ n(n-3) &= 40 \\ \boxed{8} \cdot \boxed{5} &= 40 \\ \boxed{n = 8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= 3.6 \text{ cm} \\ v &= 2.7 \text{ cm} \\ o &= n \cdot a \\ o &= 8 \cdot 3.6 \\ \boxed{o = 28.8 \text{ cm}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= n \cdot P_\Delta \\ P &= n \cdot \frac{a \cdot v}{2} \\ P &= 8 \cdot \frac{3.6^{1.8} \cdot 2.7}{2_1} \\ P &= 8 \cdot 4.86 \\ \boxed{P = 38.88 \text{ cm}^2} \end{aligned}$$

6) Koliko ima dijagonala iz jednog vrha ima mnogokut kojemu je veličina središnjeg kuta 12° ?

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_n}{d_n} &= \frac{12^\circ}{?} \\ \frac{360^\circ}{n} &= 12^\circ \quad / \cdot n \\ 360^\circ &= 12^\circ n \quad / : 12^\circ \\ \boxed{n = 30} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_n &= n - 3 \\ d_{30} &= 30 - 3 \\ \boxed{d_{30} = 27} \end{aligned}$$

Mnogokut ima 27 dijagonala iz jednog vrha.

7) Koji mnogokut ima unutarnji kut veličine 160° ?

$$\begin{aligned} \frac{\beta_n}{n} &= \frac{160^\circ}{?} \\ \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} &= 160^\circ \quad / \cdot n \\ 180^\circ n - 360^\circ &= 160^\circ n \\ 20^\circ n &= 360^\circ \quad / : 20 \\ \boxed{n = 18} \end{aligned}$$

Zadan je 18 – terokut.

- 8) Kod kojeg je mnogokuta zbroj veličina unutarnjih kutova za $1\ 800^\circ$ veći od zbroja veličina svih vanjskih kutova tog mnogokuta?

$$\text{unutarnji kutovi} = \text{vanjski kutovi} + 1\ 800^\circ$$

$$(n - 2) \cdot 180^\circ = 360^\circ + 1\ 800^\circ$$

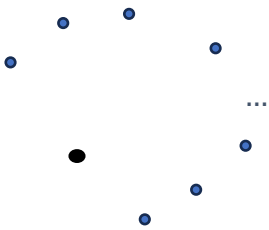
$$(n - 2) \cdot 180^\circ = 2\ 160^\circ \quad / :180^\circ$$

$$n - 2 = 12$$

$$\boxed{n = 14}$$

Kod 14 – terokuta.

- 9) U nekom pravilnom mnogokutu moguće je iz jednog vrha povući 15 dužina tako da im krajevi budu vrhovi mnogokuta. Koji je to mnogokut?



Crni vrh spajamo sa 15 plavih vrhova,
mnogokut ukupno ima 16 vrhova.

Zadan je 16 – terokut.

- 10) Izračunaj veličine kutova karakterističnog trokuta pravilnog dvanaesterokuta.

$$\frac{n = 12}{\alpha_n, \frac{\beta_n}{2} = ?}$$

središnji kut: $\alpha_n = \frac{360^\circ}{n}$

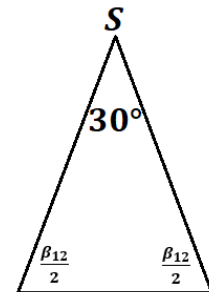
$$\alpha_{12} = \frac{360^\circ}{12}$$

$$\boxed{\alpha_{12} = 30^\circ}$$

kutovi uz osnovicu: $\frac{\beta_{12}}{2} = (180^\circ - 30^\circ) : 2$

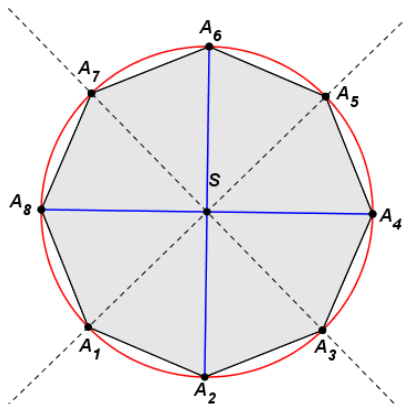
$$\frac{\beta_{12}}{2} = 150^\circ : 2$$

$$\boxed{\frac{\beta_{12}}{2} = 75^\circ}$$



- 11) Konstruiraj pravilni osmerokut s polumjerom opisane mu kružnice 3 cm.

Prvi način – Pomoću $\alpha_8 = 45^\circ$!



Analiza:

središnji kut je veličine: $\alpha_8 = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$

Konstrukcija:

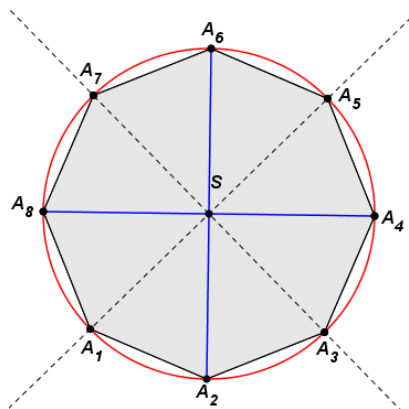
1° k (S, 3 cm) i polumjer kružnice $\overline{SA_1}$

2° Konstrukcija središnjeg kuta veličine 45° , tj. $|\sphericalangle A_1SA_2| = 45^\circ$

3° Gdje drugi krak kuta od 45° presiječe kružnicu dobivamo točku A_2 .

4° Po kružnici redom prenosimo iz vrhova mnogokuta dobivenu duljinu stranice $\overline{A_1A_2}$.

Drugi način – raspoloviti kvadrat



Analiza:

Osmerokut možemo dobiti tako da napravimo simetrale središnjih kutova **kvadrata** (četverokuta).

Konstrukcija:

1° Konstruiramo kvadrat upisan u kružnicu

- $k(S, 3.5\text{ cm})$
- dva međusobno okomita promjera
(*promjer, pa simetrala tog promjera*)

2° Konstruiramo osmerokut

- konstruiramo simetrale stranica kvadrata

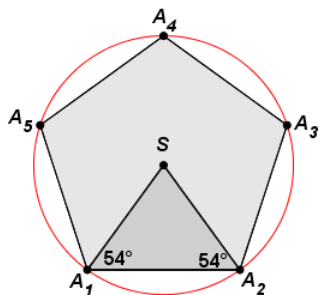
12) Nacrtaj pravilni **peterokut** duljine stranice $a = 4\text{ cm}$.

Analiza:

- kut uz osnovicu karakterističnog trokuta veličine je:

$$\frac{\beta_5}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3 \cdot 180^\circ}{5} = 54^\circ$$

- nacrtamo karakteristični trokut $\triangle A_1A_2S$
- nacrtamo $k(S, |SA_1|)$ te po kružnici prenosimo iz vrhova mnogokuta $|A_1A_2|$ (*nanošenjem duljine stranice redom dobivamo preostale vrhove*)



Konstrukcija:

1° trokut $\triangle A_1A_2S$

- $\overline{A_1A_2}$ duljine 4 cm
- kutomjerom nacrtamo kutove od 54° pri vrhu A_1 i A_2
- kraci kutova sijeku se u točki S

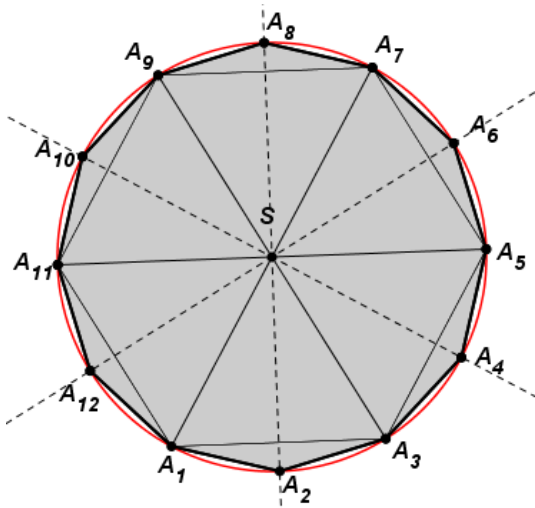
2° kružnica $k(S, |SA_1|)$

3° vrhovi A_3, A_4 i A_5 (*kružni lukovi polumjera duljine 4 cm iz vrhova*)

Kada je zadana duljina stranice mnogokuta uvijek izračunamo veličinu **kuta uz osnovicu karakterističnog trokuta** te ga konstruiramo (ako se može) ili crtamo pomoću kutomjera!

13) Konstruiraj pravilni 12 – terokut upisan u kružnicu promjera 8 cm.

Prvi način – raspoloviti šesterokut



Analiza:

12 – terokut možemo dobiti tako da konstruiramo **simetrale stranica** šesterokuta.

Koraci konstrukcije:

1° k (S, 4 cm)

2° konstruiramo pravilni šesterokut (**polumjer = duljini stranice**) (odaberemo točku na kružnici i redom prenosimo sa šestarom duljinu stranice 4 cm)

3° konstruiramo **simetrale stranica** šesterokuta

Drugi način:

Pomoću $\alpha_{12} = 30^\circ$!

– nacrtamo jedan polumjer kružnice $\overline{SA_1}$

– konstruiramo kut od 30° (vrh kuta u točki S, jedan krak kuta je $\overline{SA_1}$)

– gdje drugi krak kuta od 30° presiječe kružnicu dobivamo točku A_2

– po kružnici redom prenosimo iz vrhova mnogokuta dobivenu duljinu stranice $\overline{A_1A_2}$

14) Izračunaj opseg i površinu pravilnog 18 – terokuta duljine stranice 4.9 cm i polumjera upisane kružnice 16 mm.

$$a = 4.9 \text{ cm}$$

$$v = 1.6 \text{ cm}$$

$$o = ?$$

$$o = n \cdot a$$

$$o = 18 \cdot 4.9$$

$$o = 88.2 \text{ cm}$$

$$P = n \cdot \frac{a \cdot v}{2}$$

$$P = 18^9 \cdot \frac{4.9 \cdot 1.6}{2}$$

$$P = 9 \cdot 7.84$$

$$P = 70.56 \text{ cm}^2$$

15) Opseg pravilnog četrnaesterokuta iznosi 33.6 cm. Izračunaj duljinu jedne njegove stranice.

$$\begin{array}{l} o = 33.6 \text{ cm} \\ n = 14 \\ \hline a = ? \end{array}$$

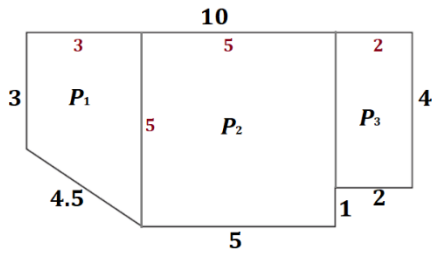
$$o = 33.6$$

$$n \cdot a = 33.6$$

$$14a = 33.6 \quad / : 14$$

$$a = 2.4 \text{ cm}$$

16) Izračunaj opseg i površinu mnogokuta sa slike:



Podijelimo sedmerokut na 3 manja lika čije površine možemo izračunati (trapez, kvadrat i pravokutnik). Površina sedmerokuta biti će jednaka zbroju triju dobivenih površina.

$P_1 = \text{pov. trapeza}$

$P_2 = \text{pov. kvadrata}$

$P_3 = \text{pov. pravokutnika}$

$P = \text{pov. sedmerokuta}$

$$P_1 = \frac{(5+3)}{2} \cdot 3$$

$$P_2 = 5 \cdot 5$$

$$P_3 = 4 \cdot 2$$

$$P = P_1 + P_2 + P_3$$

$$P_1 = \frac{8}{2} \cdot 3$$

$$P_2 = 25$$

$$P_3 = 8$$

$$P = 12 + 25 + 8$$

$$P_1 = 12$$

$$P = 45$$

Opseg je jednak zbroju duljina svih stranica:

$$o = 5 + 1 + 2 + 4 + 10 + 3 + 4.5$$

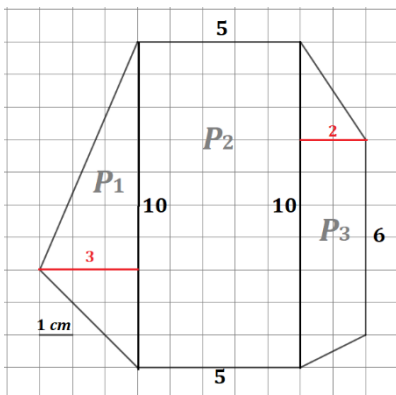
$$o = 29.5$$

17) Izračunaj površinu mnogokuta sa slike:

$P_1 = \text{pov. trokuta}$

$P_2 = \text{pov. pravokutnika}$

$P_3 = \text{pov. trapeza}$



$$P_1 = \frac{10 \cdot 3}{2}$$

$$P_1 = 15 \text{ cm}^2$$

$$P_2 = 5 \cdot 10$$

$$P_2 = 50 \text{ cm}^2$$

$$P_3 = \frac{(10+6)}{2} \cdot 2$$

$$P_3 = \frac{16}{2} \cdot 2$$

$$P_3 = 16 \text{ cm}^2$$

$P = \text{ukupna površina}$

$$P = P_1 + P_2 + P_3$$

$$P = 15 + 50 + 16$$

$$P = 81 \text{ cm}^2$$

18) Koliki je opseg i površina pravilnog **deveterokuta** ako je duljina njegove stranice 3.7 cm , a duljina polumjera opisane mu kružnice 28 mm ? **[Rješenje izrazi u cm ili cm^2 .]**

$$\begin{array}{l} a = 3.7\text{ cm} \\ v = 2.8\text{ mm} \\ \hline o, P = ? \end{array}$$

$$o = n \cdot a$$

$$o = 9 \cdot 3.7$$

$$\boxed{o = 33.3\text{ cm}}$$

$$P = 9 \cdot P_{\Delta}$$

$$P = 9 \cdot \frac{3.7 \cdot 2.8^{1.4}}{2^{1.4}}$$

$$P = 9 \cdot 5.18$$

$$\boxed{P = 46.62\text{ cm}^2}$$